Вступительная работа для поступающих в 8 класс, 09.04.2017.

1 вариант

1. Вычислите: $\dfrac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^{9}-4\cdot 3^{20}\cdot 8^{9}}{5\cdot 2^{9}\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^{6}}$.

   Решение.

   $$\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^{9}-4\cdot 3^{20}\cdot 8^{9}}{5\cdot 2^{9}\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^{6}}=\frac{5\cdot 2^{30}\cdot 3^{18}-2^{2}\cdot 3^{20}\cdot 2^{27}}{5\cdot 2^{9}\cdot 2^{19}\cdot 3^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 3^{18}}=\frac{5\cdot 2^{30}\cdot 3^{18}-2^{29}\cdot 3^{20}}{5\cdot 2^{28}\cdot 3^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 3^{18}}=$$

   $$=\frac{2^{29}\cdot 3^{18}\cdot\left(5\cdot 2-3^{2}\right)}{2^{28}\cdot 3^{18}\cdot\left(5\cdot 3-7\cdot 2\right)}=2.$$

   Задача оценивается в 4 балла.

2. На доске написано уравнение: $3\cdot(2y+*)\cdot(3y+2)-2\cdot(3y+1)^{2}=43$, звездочкой обозначено пропущенное число. Найдите это число, если известно, что $y=1$ является корнем уравнения.

   Решение.

   Так как $y=1$ является корнем уравнения, то верно равенство:

   $3\cdot(2+*)\cdot 5-2\cdot 4^{2}=43$, значит звёздочкой обозначено число 3.

   Задача оценивается в 3 балла.

3. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 46°. Найдите угол между основанием этого треугольника и его высотой, проведённой из вершины угла при его основании.

   Решение.

   Угол, смежный с данным внешним углом равнобедренного треугольника, равен $180^{0}-46^{0}=134^{0}$, а значит может быть только углом при вершине. Тогда каждый из углов при основании равен $46^{0}:2=23^{0}$. Угол между основанием треугольника и его высотой, проведённой из вершины угла при его основании, является острым углом прямоугольного треугольника, второй из острых углов которого является угол при основании, значит искомый угол равен $90^{0}-23^{0}=67^{0}$.

   Задача оценивается в 4 балла.

4. Задачи о кубе:

   а) Для окраски куба потребовалось 3 кг краски. Сколько понадобится краски, чтобы окрасить куб с ребром в 4 раза больше?

   б) Имеется 95 маленьких кубиков с ребром в 1 см. Из них сооружается самый большой из возможных кубов. Сколько маленьких кубиков осталось неиспользованными?

   Решение.

   а) При увеличении ребра куба в 4 раза, площадь поверхности куба увеличивается в 16 раз, значит на окраску нового куба потребуется $3\cdot 16=48$ кг краски.

б) На сооружение куба с ребром 4 см потребуется $4^3 = 64$ кубика, а куба с ребром 5 см – $5^3 = 125$ кубика, поэтому самый большой из возможных кубов содержит 64 кубика, при этом $95 - 64 = 31$ кубик останутся неиспользованными.

Задача оценивается а) в 2 балла, б) в 2 балла.

5. Поезд должен был пройти 720 км за 14 часов 24 минуты. Пройдя 0,75 пути, он задержался из-за ремонта на 16 минут. С какой скоростью поезд должен продолжить путь, чтобы прийти к месту назначения в срок?

Решение.

Пройдя 0,75 пути (это составляет $\frac{3}{4} \cdot 720 = 540$ км), поезд затратил

$\frac{3}{4} \cdot 14$ ч 24 мин = $\frac{3}{4} \cdot 14\frac{24}{60} = \frac{3}{4} \cdot 14\frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{72}{5} = \frac{54}{5}$ ч.

Оставшиеся $720 - 540 = 180$ (км) поезд должен был пройти за

$14\frac{2}{5} - \frac{54}{5} = \frac{72}{5} - \frac{54}{5} = \frac{18}{5}$ (ч), однако прошёл их на 16 мин = $\frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ ч быстрее, то есть затратил на путь после остановки $\frac{18}{5} - \frac{4}{15} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ (ч). Тогда скорость поезда на последнем участке была

$$180 : \frac{10}{3} = 54 \text{ (км/ч)}.$$

Задача оценивается в 5 баллов.

6. Четыре девочки поют песни, аккомпанируя друг другу. Каждый раз одна из них играет, а остальные три поют. Оказалось, что Аня спела больше всех песен – 8, а Маша спела меньше всех – 5. Сколько всего песен спели девочки?

Решение.

Так как Аня спела больше всех песен – 8, а Маша спела меньше всех – 5, то оставшиеся две девочки либо обе спели по 6 песен, либо обе спели по 7 песен, либо одна из них спела 6, а вторая – 7 песен. Таким образом, выходов на сцену девочек для пения могло быть либо $8 + 5 + 7 + 7 = 27$, либо $8 + 5 + 6 + 6 = 25$, либо $8 + 5 + 6 + 7 = 26$. Но на исполнение каждой песни выходили по 3 певца, значит общее число выходов должно делиться на 3, поэтому в действительности мог быть только первый вариант. Число исполненных песен: $27 : 3 = 9$.

Задача оценивается в 5 баллов.

Вступительная работа для поступающих в 8 класс, 09.04.2017.

2 вариант

1. Вычислите: $\dfrac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

   Решение.

   $$\frac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}=\frac{2^{19}\cdot 3^9+5\cdot 3\cdot 2^{18}\cdot 3^8}{2^9\cdot 3^9\cdot 2^{10}+2^{20}\cdot 3^{10}}=\frac{2^{19}\cdot 3^9+5\cdot 2^{18}\cdot 3^9}{2^{19}\cdot 3^9+2^{20}\cdot 3^{10}}=$$

   $$=\frac{2^{18}\cdot 3^9\cdot(2+5)}{2^{19}\cdot 3^9\cdot(1+2\cdot 3)}=\frac{1}{2}.$$

   Задача оценивается в 4 балла.

2. На доске написано уравнение: $5\cdot(3x+*)\cdot(x+1)-4\cdot(2x+1)^2=80$, звездочкой обозначено пропущенное число. Найдите это число, если известно, что $x=1$ является корнем уравнения.

   Решение.

   Так как $x=1$ является корнем уравнения, то верно равенство:

   $5\cdot(3+*)\cdot 2-4\cdot 3^2=80$, значит звёздочкой обозначено число 8,6.

   Задача оценивается в 3 балла.

3. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 32°. Найдите угол между основанием этого треугольника и его высотой, проведённой из вершины угла при его основании.

   Решение.

   Угол, смежный с данным внешним углом равнобедренного треугольника, равен $180^0-32^0=148^0$, а значит может быть только углом при вершине. Тогда каждый из углов при основании равен $32^0:2=16^0$. Угол между основанием треугольника и его высотой, проведённой из вершины угла при его основании, является острым углом прямоугольного треугольника, второй из острых углов которого является угол при основании, значит искомый угол равен $90^0-16^0=74^0$.

   Задача оценивается в 4 баллов.

4. Задачи о кубе:

   а) У кубика, объём которого 8 см^3, уменьшили все ребра в 2 раза. Чему равен объём нового кубика?

   б) Окрашенный кубик с ребром 10 см распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько будет кубиков с двумя окрашенными гранями?

   Решение.

   а) При уменьшении ребра куба в 2 раза его объём уменьшается в $2^3=8$ раз, поэтому объём нового кубика 1 см^3.

   б) Все кубики с двумя окрашенными гранями располагаются вдоль рёбер данного куба, исключая по 2 крайних кубика. Рёбер у куба – 12, вдоль каждого по 8 нужных кубиков, всего их $12\cdot 8=96$.

   Задача оценивается а) в 2 балла, б) в 2 балла.

5. Поезд должен был пройти расстояние от А до В за 11 часов 15 минут. Выйдя из А, поезд сначала двигался с меньшей скоростью и прошел 0,4 всего пути за 5 часов. Но затем увеличил скорость на 10,8 км/ч и пришел в В без опоздания. Найдите расстояние между А и В.

Решение.

Пусть сначала поезд двигался со скоростью x км/ч. За 5 часов пути он прошёл расстояние, равное $5x$ км. Это составило 0,4 всего пути, значит весь путь составляет $\frac{5x}{0,4}=12,5x$ км. После увеличения скорости поезда на 10,8 км/ч она стала равна $x+10,8$ км/ч, ему осталось проехать $12,5x-5x=7,5x$ км за время 6 часов 15 минут = $6\frac{1}{4}$ часов. Поэтому

$$\frac{7,5x}{6\frac{1}{4}}=x+10,8.$$

$$7,5x=6,25(x+10,8),$$

$$1,25x=67,5,$$

$$x=54.$$

Следовательно, расстояние между А и В равно $12,5\cdot 54=675$ км.

Задача оценивается в 5 баллов.

6. Четыре девочки поют песни, аккомпанируя друг другу. Каждый раз одна из них играет, а остальные три поют. Оказалось, что Таня спела больше всех песен – 7, а Оля спела меньше всех – 4. Сколько всего песен спели девочки?

Решение.

Так как Таня спела больше всех песен – 7, а Оля спела меньше всех – 4, то оставшиеся две девочки либо обе спели по 6 песен, либо обе спели по 5 песен, либо одна из них спела 6, а вторая – 5 песен. Таким образом, выходов на сцену девочек для пения могло быть либо $7+4+6+6=23$, либо $7+4+5+5=21$, либо $7+4+6+5=22$. Но на исполнение каждой песни выходили по 3 певца, значит общее число выходов должно делиться на 3, поэтому в действительности мог быть только второй вариант. Число исполненных песен: $21:3=7$.

Задача оценивается в 5 баллов.